Задачник

Начинаем знакомиться с задачами раздела "Геометрия" Открытого банка заданий, предложенными на странице http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/5.

Номинально в нем 3889 задач.

По традиции, много теории давать не буду, потому что методичка не претендует на звание полноценного учебника по геометрии, да и вы сами можете найти море теории и в книжках, и на различных Интернет-ресурсах.

Ожидаемо в этом разделе будут встречаться задачи части С (в КИМе 2014 года это задачи С2 и С4), тут решать я их не стану. Решаем пока только простые задачи части В, стоимостью в 1 первичный балл.

Пока читатель не научится решать простые задачи, бессмысленно браться за примеры высокого уровня.

На самом деле, такой подход правильный, потому что во все годы правильное решение простых задач (задач части В) давало намного выше баллов, чем правильное решение задач части С.

К примеру, за верное решение 15 задач части В (т.е. всех задач первой части экзамена, которые считаются простыми) в 2014 году вам бы поставили 68 баллов из 100! Этот факт прямо указывает на то, что экзаменуемый обязан сначала без разговоров решать все задачи часть В, а уже потом пробовать бороться с частью С.

Вычислительные задачи были решены в разделе "Алгебра".

ВНИМАНИЕ!!!

Разумеется, моя методичка содержит ошибки в предложенных решениях. Задача читателя состоит в том, чтобы их отыскать и решить правильно все задачи. Без ошибок было бы не интересно, а зная, что они есть, вы будете тщательнее проверять свои решения – самосовершенствоваться.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!

Геометрия

Поступлю в этот раз так, как и в методичке по разделу "Начала математического анализа" – где сочту нужным, страницы, на которых можно найти много одинаковых по вопросу и идее решения задач.

Как и всегда, укажу номера всех рассмотренных заданий.

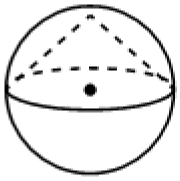
01E909, 09010E, 09161C, 0A3F2B, 10CED3, 125494, 135E6D, 183543, 18E12A; 19129, 19131, ..., 19177; 19639, 19641, ..., 19661; 19899, 19901, ..., 19951; 19979, 19981, ..., 20051; 1AD8E6, 1B4A28, 1c9dbc; 21337, 21339, ..., 22695; 244982 – 245008; 245335 – 245347; 245351 – 245358; 245361 – 245369; 245370, 245372, 245376, 245377, 245378, 245382, 24884c, 24b762; 25531, 25533, ..., 25709; 25721, 25723, ..., 25729; 25851, 25853, ..., 25969; 26197, 26199, 261d23, 26203, 26205, 26233, 26235, 26237, 26541, 26551, 26567; 269439, 269441, ..., 269519; 26da32; 27041 – 27048; 27051 – 27059; 27061 – 27075; 270479; 27081 – 27089; 27091; 27094 – 27100; 27102; 27104 – 27119; 27124; 27128 – 27133; 27135 – 27137; 27139, 27141, ..., 27147; 27148, 27149; 27151, 27153, ..., 27157; 27158; 27160 – 27162; 27165; 27168 – 27172; 27175 – 27185; 27187 – 27194; 27209 – 27216; 27220; 27265 – 27273; 27277, 27280; 27284 – 27289; 27320 – 27329; 27336 – 27358; 27431, 27432; 27543 – 27566; 27568 – 27581; 27589 – 27592; 27595, 27601, 27603, 27604, 27606; 27609 – 27616; 27618 – 27621; 27623, 27624; 27631 – 27638; 27640, 27642, 27644, 27646; 27669 – 27674; 27677 – 27682; 27685 – 27690; 27694; 27696 – 27701; 27704 – 27706; 27717; 27743 – 27748; 27750; 27757 – 27780; 27789 – 27800; 27807, 27809, 27817; 27824 – 27829; 27831; 27833 – 27837; 27843 – 27846; 27848 – 27854; 27857 – 27859; 27862, 27864; 27866 – 27880; 27884 – 27887; 27890 – 27897; 27900; 27906 – 27910; 27913, 27914; 27916 – 27930; 27913, 27914; 27916 – 27930; 27932; 27933 – 27942; 27943; 27946 – 27951; 284348, 284349, 284350; 284357 – 284362; 28881, 28883, ..., 28977; 30467, 30469, ..., 31025; 31273, 31275, ..., 31321; 31409, 31411, ..., 31457; 315122 – 315124; 315132, 315133, 316552, 316554, 316557; 31707, 31709, ..., 31845; 31655, 318145, 318146, 318474, 318475, 319056, 319057, 319058; 31849, 31842, ..., 31989; 33199, 33201, ..., 33495; 4795, 4797, ..., 4803; 47995, 47997, ..., 48043; 4807, 4809, 4815, 4821, 4825, 4827, 4829, 4833, 4835, 4837, 4839; 2857, 4859, ..., 4959; 4989, 4991, ..., 5049; 5053, 5055, ..., 5319; 71889, 71891, ..., 72765; 72823, 72825, ..., 73335; 73515, 73517, ..., 73567; 73627, 73629, ..., 74047; 74093, 74095, ..., 74187; 74417, 74419, ..., 74429; 74443, 74445, ..., 74497; 74607, 74609, ..., 74667; 74795, 74797, ..., 75173; 75335, 75337, ..., 75417; 75647, 75649, ..., 75695; 75849, 75851, ..., 75903; 76195, 76197, ..., 76215; 76439, 76441, ..., 76507; 76659, 76661, ..., 76811; 77154 – 77157.

132 новые отложенные задачи, 11 ранее отложенных, всего по номерам 3792, итого 3935.

Ошибка

$$\frac{3935-3889}{3889} \approx 0{,}011828.$$

Задание №01E909
Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса.



Радиус сферы равен $10\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.

Решение.

Образующая конуса – это отрезок, равный кратчайшему расстоянию от точки окружности основания конуса, до его вершины.

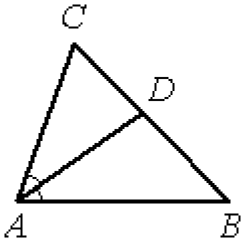
На рисунке две образующие обозначены пунктиром.

Если мы соединим центр сферы с вершиной конуса и с концом любой из нарисованных образующих, мы получим равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом, равным радиусу сферы и гипотенузой, которую надо найти.

Известно, что гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника в корень из двух раз больше катета, поэтому длина образующей равна 20.

Ответ: 20.

Задание №09161C
В треугольнике *ABC AD* — биссектриса, угол *C* равен 62°, угол *CAD* равен 32°. Найдите угол *B*. Ответ дайте в градусах.



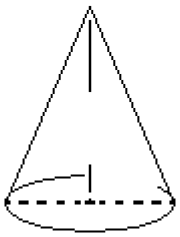
Решение.

Сумма углов треугольника равна 180 градусов, тогда величина угла B найдется как разность

$$\angle B = 180° - \angle C - \angle A = 180° - 62° - 2\angle CAD = 54°.$$

Ответ: 54.

Задание №10CED3
Высота конуса равна 9, а длина образующей равна 41.



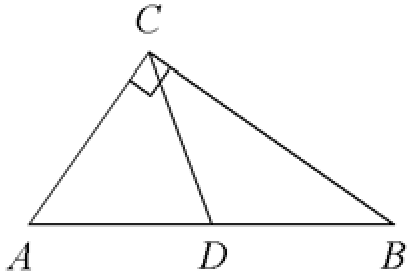
Найдите диаметр основания конуса.

Решение.

Высота, радиус основания и образующая конуса вместе составляют прямоугольный треугольник, по теореме Пифагора можем найти радиус основания, а значит и искомый диаметр.

Ответ: 80.

Задание №183543
В треугольнике *ABC* *CD* — медиана, угол *C* равен 90°, угол *B* равен 35°. Найдите угол *ACD*. Ответ дайте в градусах.



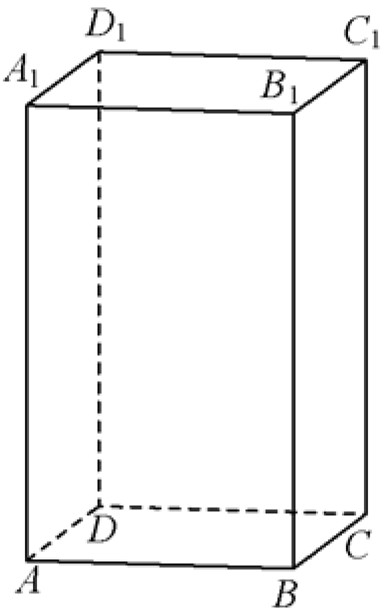
Решение.

Медиана, проведенная к гипотенузе, равна её половине (и радиусу описанной окружности тогда уж, это же очевидно) – разбивает треугольник на 2 равнобедренных. Углы при основании равнобедренных треугольников равны.

$$\angle A = \angle ACD, \qquad \angle B = \angle BCD, \qquad \angle ACD = \angle C - \angle BCD = 90° - \angle B = 55°.$$

Ответ: 55.

Задание №1AD8E6
Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, D, A_1, B, C, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB=3$, $AD=4$, $AA_1=5$.



Решение.

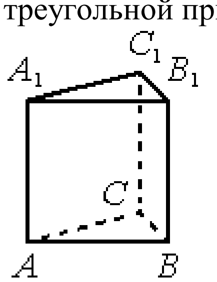
Искомый многогранник занимает ровно половину объема всего прямоугольного параллелепипеда.

Объём прямоугольного параллелепипеда вычисляется как произведение трех его измерений (трех его параметров) – высоты, ширины и длины.

Найдя объем параллелепипеда простым умножением данных чисел, найдем и ответ.

Ответ: 30.

Задание №1B4A28
Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 7, а боковое ребро равно 6.



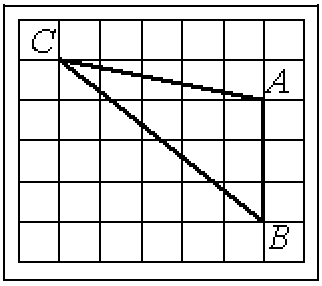
Решение

Многогранник искомого объема есть треугольная пирамида с площадью основания 7 и высотой 6. Объем пирамиды равен одной третьей от произведения площади основания на высоту.

Ответ: 14.

Задание №1c9dbc

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник *ABC*. Найдите длину его средней линии, параллельной стороне *AB*.



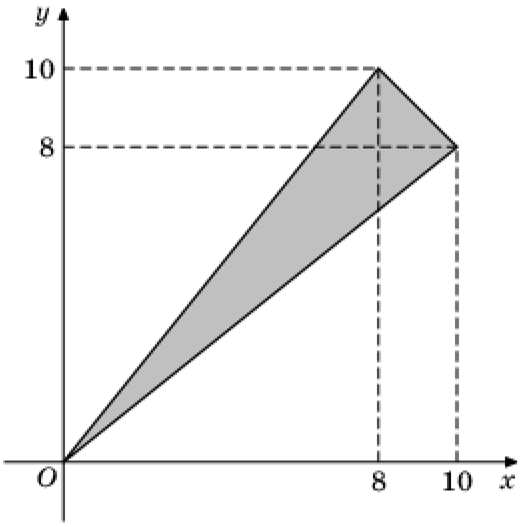
Решение.

Площадь треугольника равна половине произведения стороны на высоту, проведенную к этой стороне. По клеточкам удобно посчитать длину *AB*=3, и высоту к ней проведенную, 5.

Ответ: 7,5.

Задание №21337

Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (0;0), (10;8), (8;10).



Решение.

Задачу можно решит несколькими способами: найти длины векторов {8;10} и {10;8}, найти синус угла между ними и подставить в формулу площади треугольника.

А можно просто разбивать мысленно рисунок на площади прямоугольных треугольников, которые легко считаются.

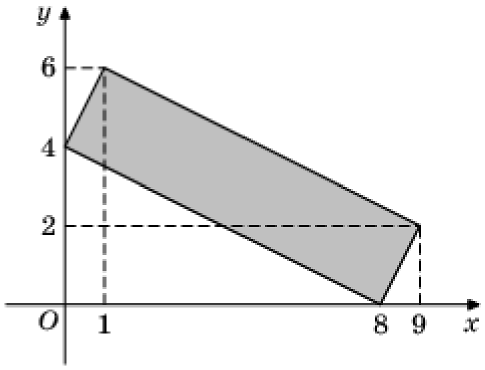
Если мысленно дорисовать точку (10;10), можно заметить, что искомая площадь найдется как разность площадей квадрата с координатами (0;0), (0;10), (10;10), (10;0) и трех прямоугольных треугольников с координатами (0;0), (0;10), (8;10);   (0;0), (10;0), (10;8);   (10;8), (8;10), (10;10).

Длина стороны квадрата равна 10, длины катетов прямоугольных треугольников находятся как расстояния между вершинами.

$$100 - 40 - 40 - 2 = 18.$$

Ответ: 18.

Задание №21343
Найдите площадь прямоугольника, вершины которого имеют координаты (8;0), (9;2), (1;6), (0;4).



Решение.

То, что здесь изображен прямоугольник, ни у кого сомнений вызывать не должно.

Тут разбиение и дополнительное построение каких-то удобных прямоугольных треугольников можно сделать, но удобнее просто найти длину и ширину прямоугольника.

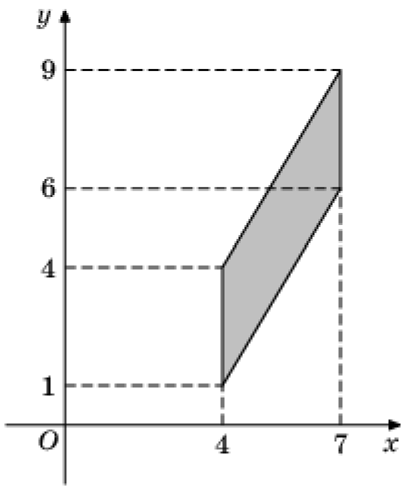
Из *обязательно* прямоугольного треугольника с координатами (0;0), (0;4), (8;0) по теореме Пифагора находим длину прямоугольника, $2\sqrt{20}$.

Из прямоугольного треугольника с координатами (8;0), (9;0), (9;2) или же из прямоугольного треугольника с координатами (0;4), (0;6), (1;6) по теореме Пифагора находим ширину прямоугольника, $\sqrt{5}$.

Тогда площадь прямоугольника найдется как произведение полученных чисел, 20.

Ответ: 20.

Задание №21861
Найдите площадь параллелограмма, изображенного на рисунке.



Решение.

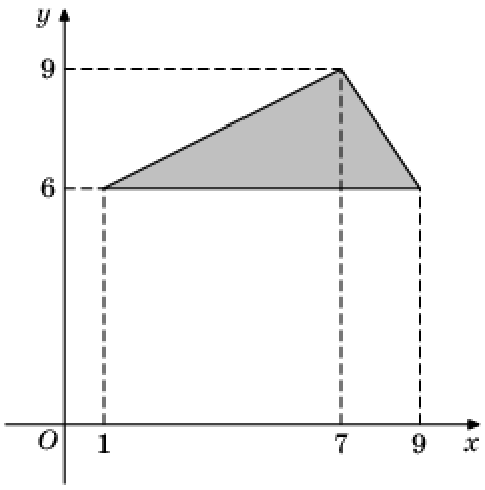
Площадь параллелограмма есть произведение стороны на высоту, проведенную к этой стороне.

Легко вычисляется длина вертикальной стороны и горизонтальной высоты, к ней проведенной.

Надо понимать, что разбиение на фигуры, площади которых легко считаются, не всегда приемлемо, куда надежнее посчитать длины элементов формулы площади.

Ответ: 9.

Задание №21863
Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1;6), (9;6), (7;9).

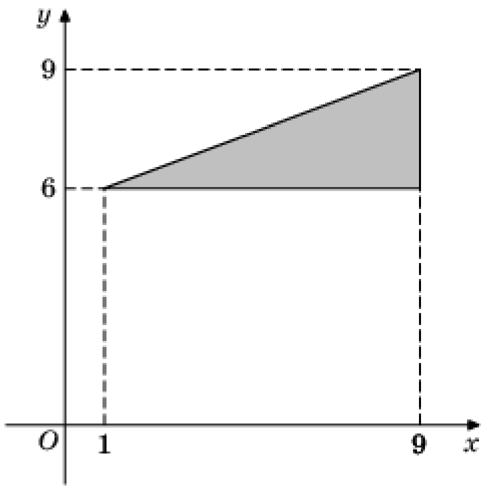


Решение.

Аналогичная ситуация, легко находится длина горизонтальной стороны треугольника и вертикальной высоты, к ней проведенной. А площадь треугольника будет равна половине произведения этих чисел.

Ответ: 12.

Задание №21865
Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1;6), (9;6), (9;9).

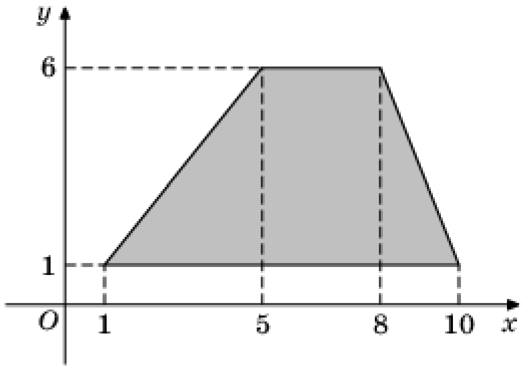


Решение.

Ну тут уж всё очевидно.

Ответ: 12.

Задание №22487
Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (1;1), (10;1), (8;6), (5;6).



Решение.

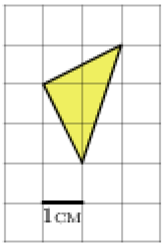
Площадь трапеции есть половина произведения суммы длин оснований на высоту.

Всё удобно считается, а потому что иного быть не может.

Даже если не знать формулу площади трапеции, можно поддаться искушению посчитать площади двух прямоугольных треугольников и одного прямоугольника, которые так отчетливо выделяются пунктирными линиями.

Ответ: 30.

Задание №244982
Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



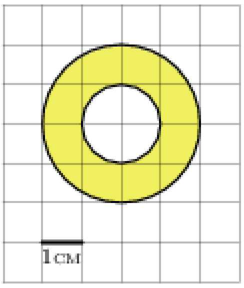
Решение.

Надо очертить вокруг этого треугольника прямоугольник строго по клеточкам. Размеры прямоугольника получатся 2 на 3, сразу станут видны три прямоугольных треугольника, площади которых необходимо вычесть из площади прямоугольника для получения искомого результата.

6 – 1 – 1 – 1,5 = 2,5.

Ответ: 2,5.

Задание №245008
Найдите (в см2) площадь S кольца, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). В ответе запишите S / π.



Решение.

Площадь кольца есть разность площадей кругов внешнего радиуса и внутреннего радиуса.

Площадь круга есть квадрат радиуса, умноженный на.

$$2^2\pi - 1^2\pi = 3\pi.$$

Результат просят разделить на π и записать ответ.

Ответ: 3.

Задание №245347
Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, B_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 3.

Решение.

Бывает и так, что в геометрической задаче рисунка вам не дадут.

Однако из условия ясно, что просят найти объем треугольной пирамиды, формулу мы знаем.

Причем основание этой пирамиды в два раза меньше исходной призмы.

Ответ: 3.

Задание №245351
Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём шара равен 28. Найдите объём конуса.

Решение.

Поскольку конус вписан в шар, то радиус его основания равен радиусу шара и равен собственно высоте конуса.

$$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi r^3, \qquad V_{\text{к}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}h = \frac{1}{3}\pi r^3.$$

Выходит, что объём вписанного в шар конуса в 4 раза меньше объёма шара.

Ответ: 7.

Задание №245361
Найдите угол ABD_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого AB=5, AD=4, AA_1=3. Ответ дайте в градусах.

Решение.

Треугольник ABD_1 – прямоугольный, в нём угол BAD_1 равен 90 градусов. Нетрудно вычислить AD_1=5, а значит треугольник еще и равнобедренный.

Ответ: 45.

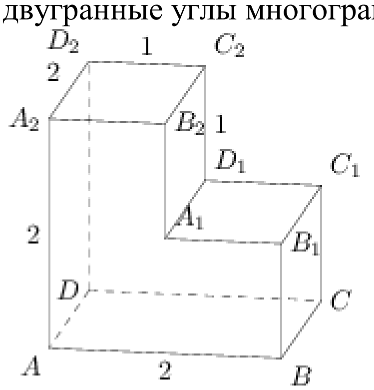
Задание №245364
В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние между точками A и E_1.

Решение.

Нельзя забывать, что в правильном шестиугольнике углы равны 120 градусов, а косинус угла 120 градусов равен –0,5. Понятно, что надо сначала найти A_1E_1, а затем по теореме Пифагора и искомый отрезок.

Ответ: 2.

Задание №245370
Найдите расстояние между вершинами A и C_2 многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



Решение.

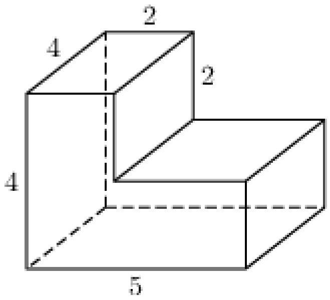
Это просто диагональ прямоугольного параллелепипеда с параметрами 2, 2, 1. Есть её формула

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

где a, b, c– параметры (или измерения еще их называют, длина, ширина и высота с точностью до переименования) параллелограмма.

Ответ: 3.

Задание №25531
Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

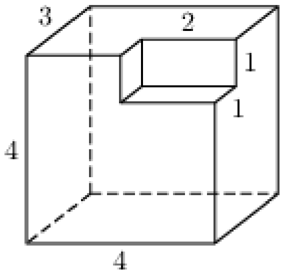


Решение.

Удачно разбейте многогранник на 2 прямоугольных параллелепипеда, спокойно посчитайте их объёмы. 4*2*2+5*2*4=56.

Ответ: 56.

Задание №25607
Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



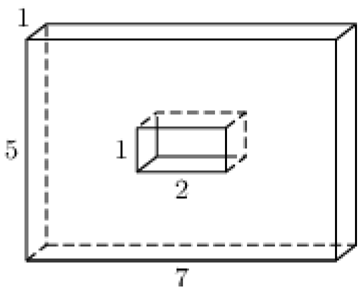
Решение.

Если смотреть на этот многогранник строго перпендикулярно каждой грани, то будет казаться, что это целый параллелограмм, поэтому его площадь поверхности равна площади поверхности параллелограмма.

Можно считать честно, а можно поверить мне на слово. 4*(3*4) + 2*(4*4)=80.

Ответ: 80.

Задание №25721
Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

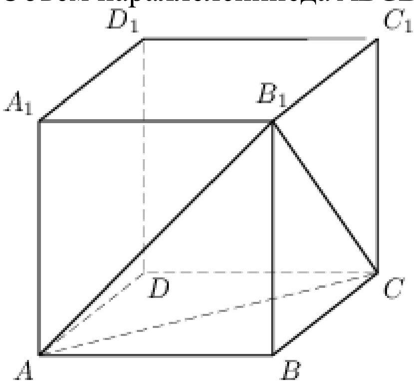


Решение.

Считаем площадь поверхности всего параллелограмма, потом вырезаем из неё 2 прямоугольника площадью 2, а затем прибавляем площади поверхностей внутренних стенок – это два прямоугольника площадью 2 и два квадрата площадью 1. Итого 2*(5*1+5*7+7*1)–2*2+2*2+2*1=96.

Ответ: 96.

Задание №25851
Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 1.5. Найдите объем треугольной пирамиды $ABCB_1$.

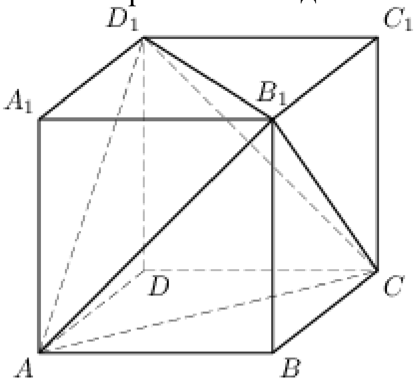


Решение.

Формула объема призмы от формулы объема пирамиды с одним основанием и высотой, отличается множителем 1/3. Но у нас не совсем так, у нас основание четырехугольной призмы – параллелепипеда – в два раза больше площади пирамида, а значит её объём будет в 6 раз меньше объёма призмы. 1,5/6=0,25.

Ответ: 0,25.

Задание №25863
Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 3.6. Найдите объем треугольной пирамиды AD_1CB_1.



Решение.

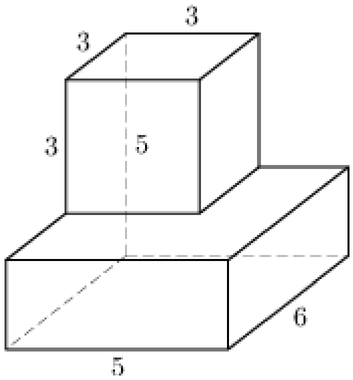
Используя предыдущую задачу,

$$V(AD_1CB_1) = V(ABCDA_1B_1C_1D_1) - V(AA_1D_1B_1) - V(D_1ADC) - V(CB_1C_1D_1) - V(B_1ABC).$$

$$V(AD_1CB_1) = 3{,}6 - 0{,}6 - 0{,}6 - 0{,}6 - 0{,}6 = 1{,}2.$$

Ответ: 1,2.

Задание №25883
Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



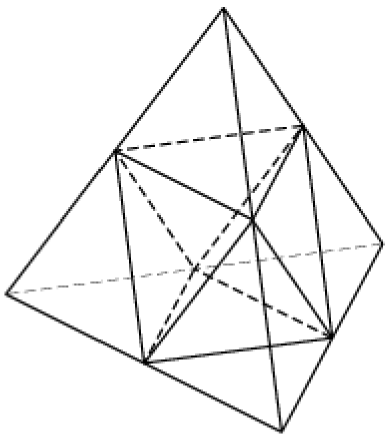
Решение.

Считаем площадь поверхности верхнего параллелограмма (куба), затем нижнего и вычитаем площадь верхней грани верхнего параллелограмма.

6*3*3+2*(5*3+5*6+6*3)–3*3=171.

Ответ: 171.

Задание №25951
Объём тетраэдра равен 190. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются середины рёбер данного тетраэдра.



Решение.

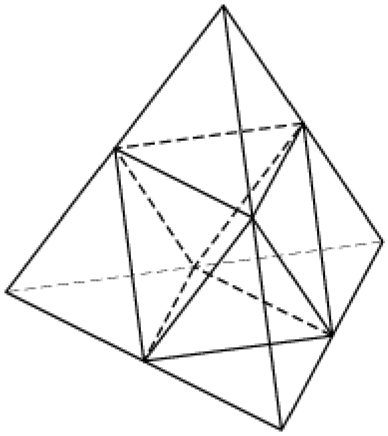
Поскольку вершины многогранника делят ребра тетраэдра пополам, то отношение объёма каждой их четырех образовавшихся треугольных пирамид к объёму тетраэдра, равно кубу коэффициента подобия, т.е. 1/8.

Тогда незамедлительно объём искомого многогранника найдем как разность объёмов большого тетраэдра с четырьмя маленькими.

190–4*(190/8)=95.

Ответ: 95.

Задание №25961
Площадь поверхности тетраэдра равна 120. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются середины рёбер данного тетраэдра.

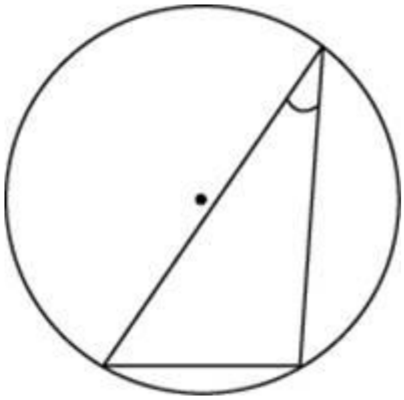


Решение.

Просто посмотрите на одну грань большого тетраэдра, она разбита на 4 равновеликих (и даже равных) треугольника, т.е. площадь поверхности одной грани искомого тетраэдра в 4 раза меньше площади поверхности одной грани большого тетраэдра. А значит и вся площадь поверхности искомого тетраэдра в 4 раза меньше площади поверхности большого тетраэдра.

Ответ: 30.

Задание №26197
Чему равен острый вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности? Ответ дайте в градусах.



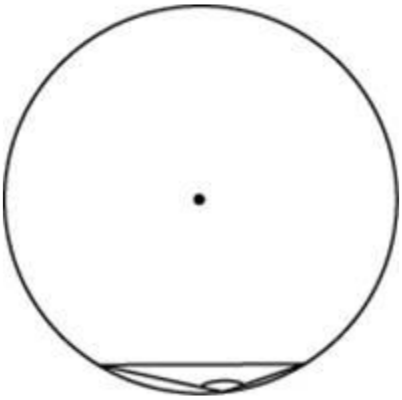
Решение.

Центральный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности, равен 60 градусов – просто соедините концы хорды с центром окружности и получите равносторонний треугольник.

А вписанный угол в два раза меньше центрального, опирающегося на одну с ним дугу.

Ответ: 30.

Задание №26199
Чему равен тупой вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности? Ответ дайте в градусах.

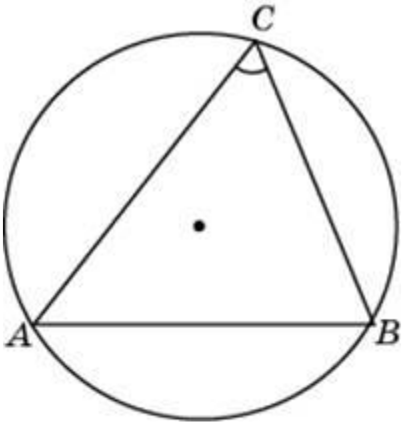


Решение.

Основываясь на результате предыдущей задачи, отметим, что вписанные углы, опирающиеся на дуги, дополняющие друг друга до полной окружности, в сумме дают 180 градусов.

Ответ: 150.

Задание №26203
Радиус окружности равен 1. Найдите величину острого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{3}$. Ответ дайте в градусах.

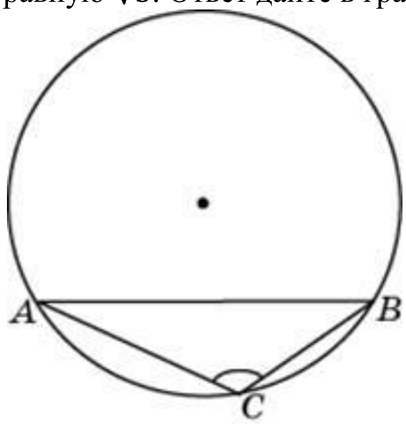


Решение.

Соединяем точки A и B с центром окружности, получаем треугольник со сторонами 1, 1 и корень из трёх. По теореме косинусов находим центральный угол, искомый же будет в 2 раза меньше.

Ответ: 60.

Задание №26205
Радиус окружности равен 1. Найдите величину тупого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{3}$. Ответ дайте в градусах.

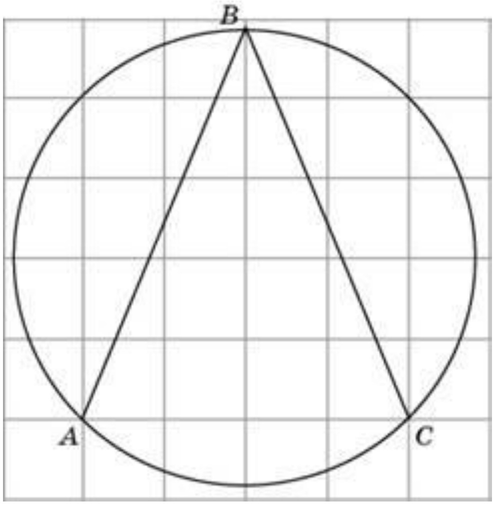


Решение.

Основываясь на результатах трех предыдущих задач, получаем 120 градусов.

Ответ: 120.

Задание №26233
Найдите угол *ABC*. Ответ дайте в градусах.

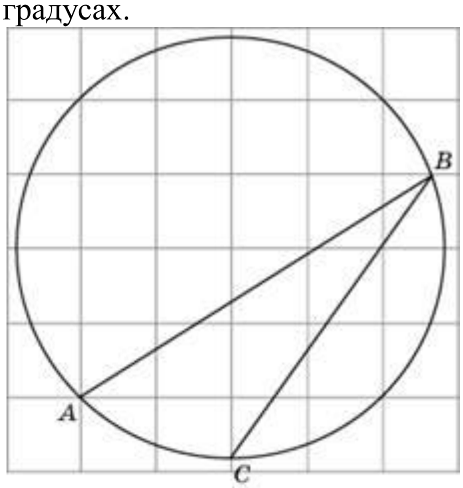


Решение.

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны. Мы, например, можем легко заметить, что если двигаться от точки *C* вверх до пересечения с окружностью, получив точку *D*, имеем угол *ADC*=*ABC*. Но треугольник *ADC* прямоугольный, а значит искомый угол равен 45 градусов.

Ответ: 45.

Задание №26237
Найдите градусную меру дуги BC окружности, на которую опирается угол BAC. Ответ дайте в градусах.



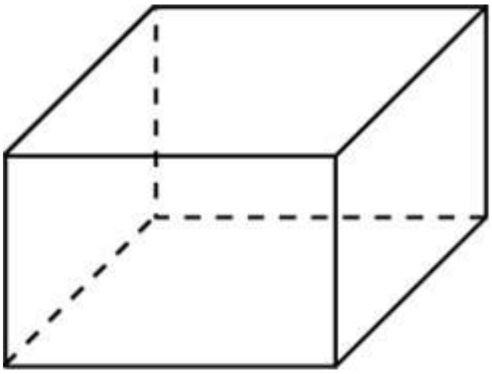
Решение.

Градусная мера дуги это попросту величина центрального угла в градусах, который опирается на эту самую дугу.

Если мы соединим точки A и C с центром окружности, а затем от центра окружности будем двигаться горизонтально влево до пересечения с окружностью в точке D, получим прямоугольный треугольник. Легко можно видеть, что дуга AC есть половина дуги DC, а значит искомая градусная мера будет 45 градусов.

Ответ: 45.

Задание №26541
Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3 и 4. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 52. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.

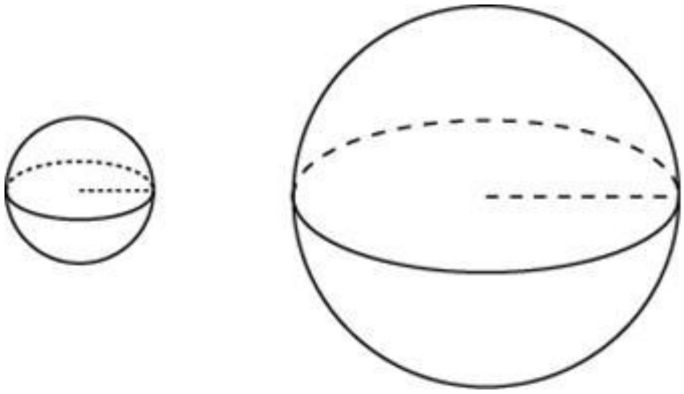


Решение.

Надо уравнение составлять, 2*(3*x+4*x+3*4)=52, откуда x=2.

Ответ: 2.

Задание №26551
Дано два шара. Радиус первого шара в 70 раз больше радиуса второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?



Решение.

Даже если не знать формулу площади поверхности шара, можно что-нибудь придумать.

Все мы знаем, что площадь это всегда произведение каких-то двух размеров на какой-то коэффициент. Именно двух размеров – вспоминаем формулы площадей прямоугольника, квадрата, треугольника, трапеции, параллелограмма.

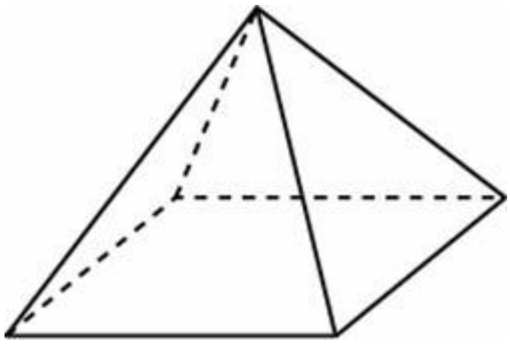
В шаре только один параметр, его радиус. Значит ничего не остается, кроме как предположить, что в формулу площади поверхности шара его радиус входи в квадрате. И это действительно так.

$$S_{\text{шар}} = 4\pi R^2.$$

Значит искомый ответ есть 70*70=4900.

Ответ: 4900.

Задание №26567
Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 6, боковые рёбра равны 5. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.



Решение.

Площадь поверхности любой правильной пирамиды считается по формуле

$$S_{\text{пир}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot P_{\text{осн}} \cdot a + S_{\text{осн}},$$

где $P_{\text{осн}}$ есть периметр основания, a–апофема (перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к стороне основания).

Грани нашей пирамиды есть равнобедренные треугольники, апофема в них есть и медиана, и биссектриса, и высота – легко считаем, она равна 4. Тогда получаем ответ, 0,5*24*4+36=84.

Ответ: 84.

Задание №269439
Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём шара равен 116. Найдите объём конуса.

Решение.

Если конус вписан в шар таким образом, что радиус его основания равен радиусу шара, то имеют место формулы

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (\pi R^2) \cdot R = \frac{\pi}{3} R^3, \qquad V_{\text{шар}} = \frac{4}{3}\pi R^3, \qquad V_{\text{кон}} = \frac{1}{4} V_{\text{шар.}}$$

Ответ: 29.

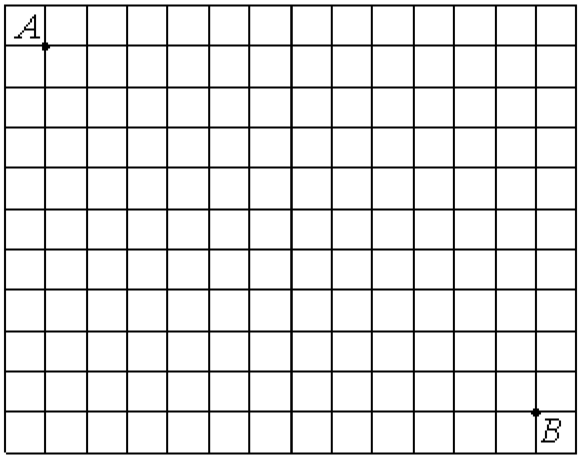
Задание №269491
Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём конуса равен 2. Найдите объём шара.

Решение.

Задача обратная предыдущей, умножаем на 4 значит.

Ответ: 8.

Задание №26da32
На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены точки *A* и *B*. Найдите длину отрезка *AB*.

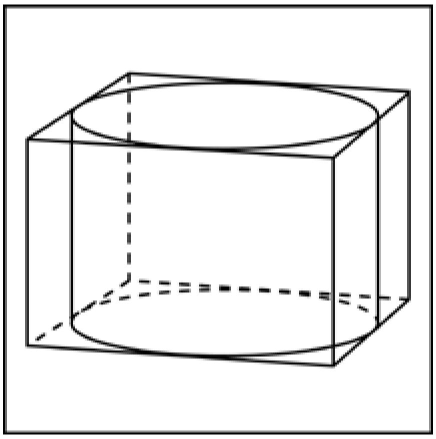


Решение.

Считаем аккуратно по клеточкам два катета подходящего прямоугольного треугольника – по горизонтали 12, по вертикали 9 – по теореме Пифагора получаем ответ 15.

Ответ: 15.

Задание №27041
Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите объем параллелепипеда.

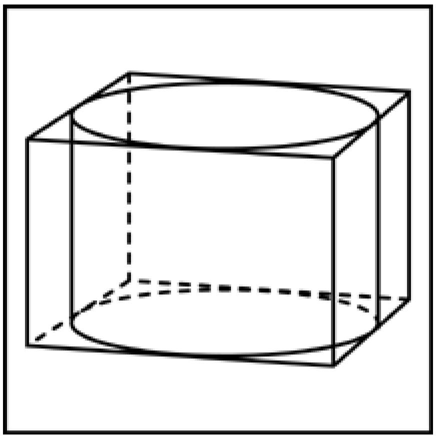


Решение.

Окружность вписать можно только в квадрат, причем радиус её будет в 2 раза меньше стороны квадрата, значит длина стороны основания параллелепипеда будет 2*1=2. Высоты цилиндра и параллелепипеда совпадают, а как же иначе? Значит ответ просто 2*2*1=4.

Ответ: 4

Задание №27042
Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 4. Объем параллелепипеда равен 16. Найдите высоту цилиндра.



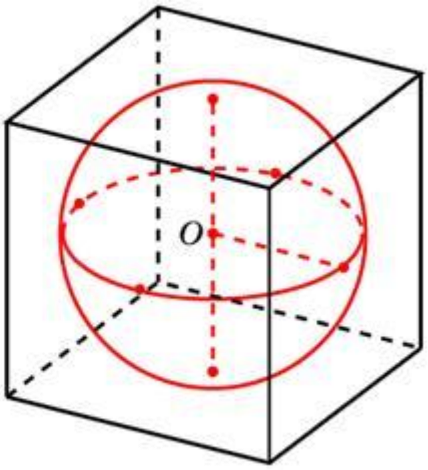
Решение.

Составляем уравнение, 16=8*8*x, x=0,25.

Ответ: 0,25.

Задание №27043

Куб описан около сферы радиуса 1. Найдите объём куба.



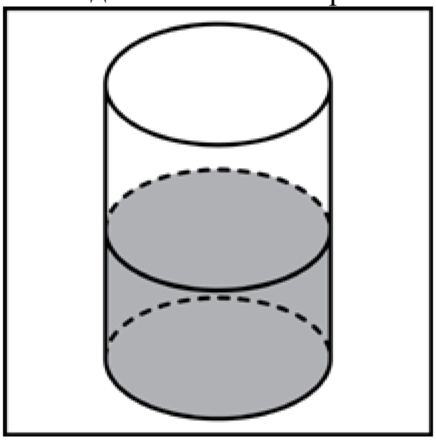
Решение.

Всем должно быть понятно, что параметр куба в два раза больше параметра сферы, тогда объем куба $(2*1)^3=8$.

Ответ: 8.

Задание №27045

В цилиндрический сосуд налили $2000 см^3$ воды. Уровень жидкости оказался равным 12 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 9 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в $см^3$.

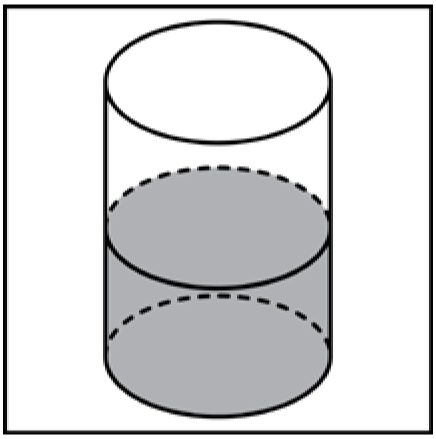


Решение.

По-хорошему надо написать две формулы, одну выразит через другую, но я оставляю это для читателя, а сам скажу что искомый объем равен 9/12 от имеющегося, то есть 1500.

Ответ: 1500.

Задание №27046
В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

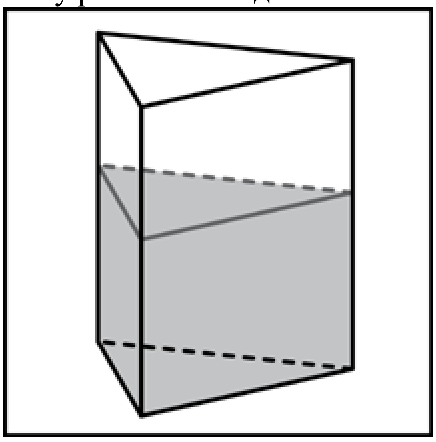


Решение.

Если диаметр увеличился в 2 раза, то радиус увеличился в 4 раза, а площадь основания в 16 раз. Поскольку объем жидкостей один и тот же, значит уровень жидкости во втором сосуде будет в 16 раз меньше уровня в первом.

Ответ: 1.

Задание №27047
В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 2300 $см^3$ воды и полностью в нее погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 25 см до отметки 27 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в $см^3$.



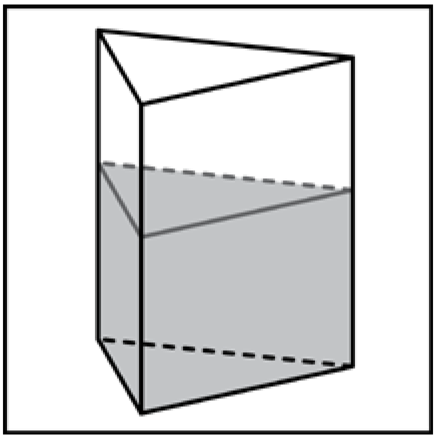
Решение.

Объем детали равен объему жидкости, которая занимает в сосуде 27–25=2 сантиметра уровня.

Тогда искомый объем будет (2/25)*2300=184.

Ответ: 184.

Задание №27048
В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 80 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если ее перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в 4 раза больше, чем у первого? Ответ выразите в см.



Решение.

Если сторона основания возрастет в 4 раза, площадь основания возрастет в 16 раз. По условию, объем одинаковый, значит уровень жидкости в 16 раз уменьшится.

Ответ: 5.

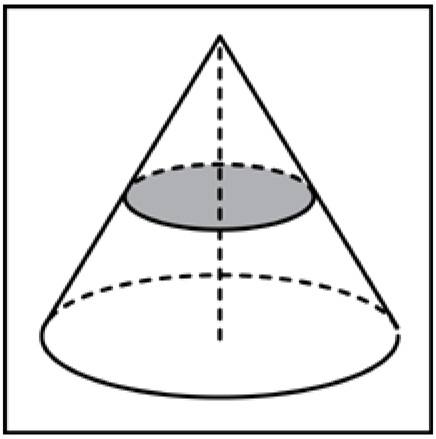
Задание №27051
Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём конуса равен 25. Найдите объём цилиндра.

Решение.

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h, \qquad V_{\text{ц}} = S_{\text{осн}} h.$$

Ответ: 75.

Задание №27052
Объем конуса равен 16. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.

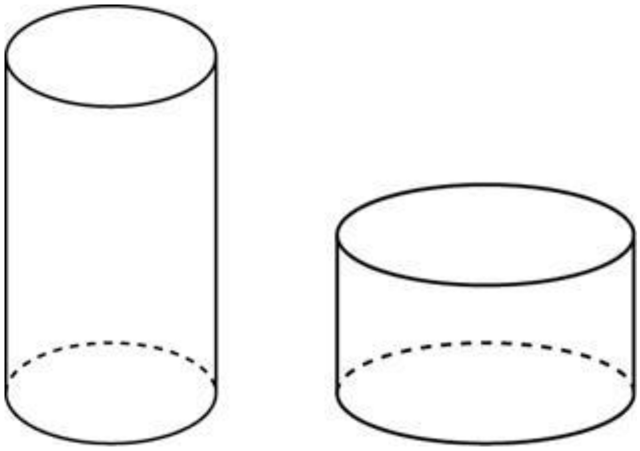


Решение.

Объемы подобных фигур относятся как кубы коэффициента подобия. Понятно, что все параметры меньшего конуса меньше параметров большего конуса в 2 раза, значит объем меньшего конуса меньше объема большего в 8 раз.

Ответ: 2.

Задание №27053
Дано два цилиндра. Объём первого цилиндра равен 12. У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания в два раза меньше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра.

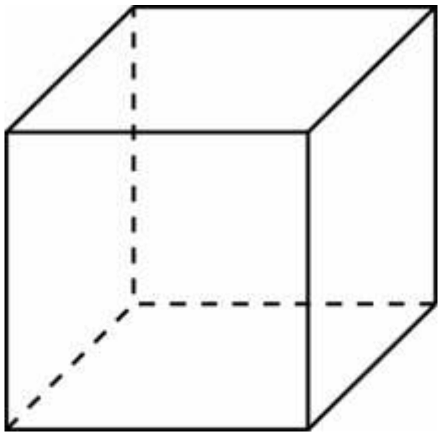


Решение.

$$V_{\text{ц}} = S_{\text{осн}}h = \pi R_{\text{осн}}^2 h, \qquad V_1 = \pi R_1^2 h_1, \qquad V_2 = \pi R_2^2 h_2 = \pi \left(\frac{1}{2}R_1\right)^2 3h_1 = \frac{3}{4}V_1 = 9.$$

Ответ: 9.

Задание №27055
Площадь поверхности куба равна 18. Найдите его диагональ.



Решение.

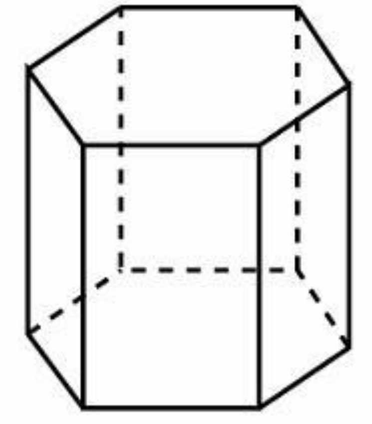
Для куба с ребром a

$$V_{\text{куб}} = a^3, \qquad S_{\text{куб}} = 6a^2, \qquad d_{\text{куб}} = a\sqrt{3}.$$

Применяя две последние формулы, получим ответ 3.

Ответ: 3.

Задание №27057
Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 5, а высота — 10.



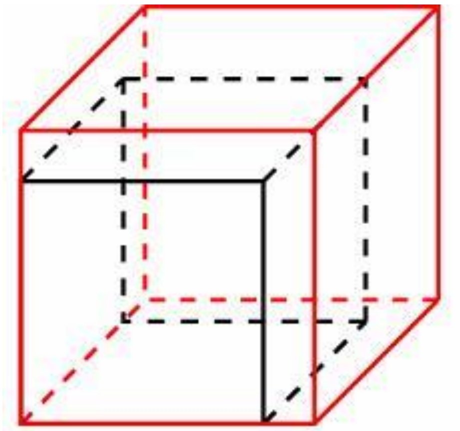
Решение.

Формула площади боковой поверхности правильной призмы

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}}h.$$

Ответ: 300.

Задание №27061
Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его площадь поверхности увеличится на 54. Найдите ребро куба.

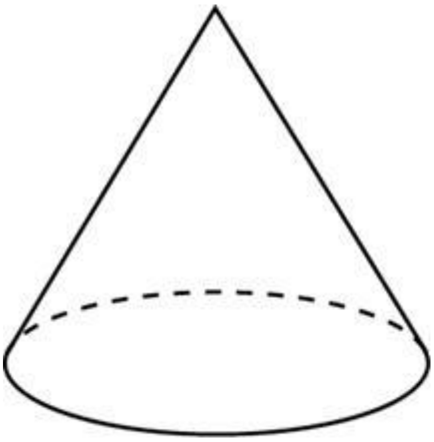


Решение.

Уравнение $6(x+1)^2 – 6x^2 = 54$, $x = 4$.

Ответ: 4.

Задание №27160
Площадь боковой поверхности конуса в два раза больше площади основания. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания. Ответ дайте в градусах.

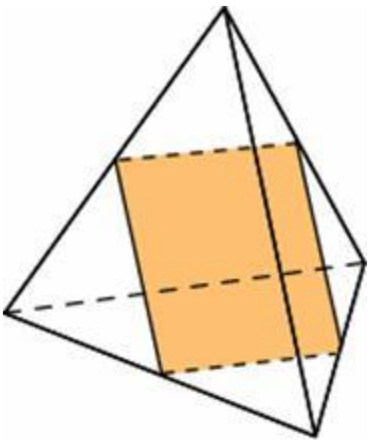


Решение.

В таком конусе образующая в 2 раза больше радиуса, значит в прямоугольном треугольнике, составленном из высоты конуса, радиуса его основания и образующей, катет будет в 2 раза меньше гипотенузы.

Ответ: 60.

Задание №27175
Ребра тетраэдра равны 1. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырех его ребер.

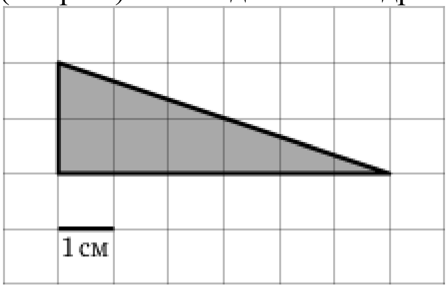


Решение.

Это просто квадрат со стороной, равной половине ребра тетраэдра. 0,5*0,5=0,25.

Ответ: 0,25.

Задание №27543
Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

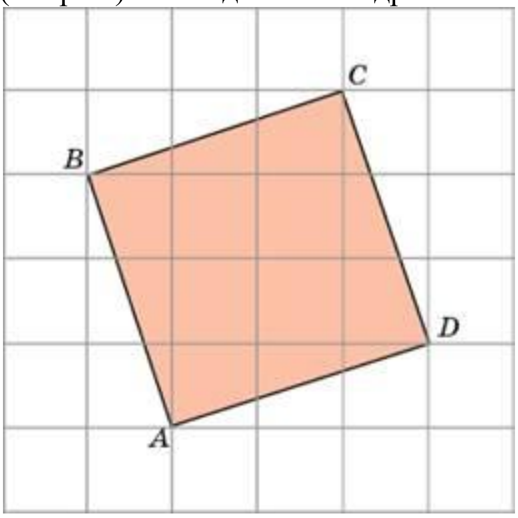


Решение.

По клеточкам, 2*6/2=5.

Ответ: 6.

Задание №27551
Найдите площадь квадрата, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.) Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

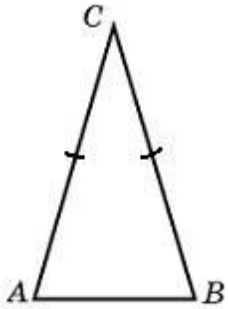


Решение.

Легко вычислить сторону квадрата, она равна корню из 10.

Ответ: 10.

Задание №27589
Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30∘. Боковая сторона треугольника равна 10. Найдите площадь этого треугольника.

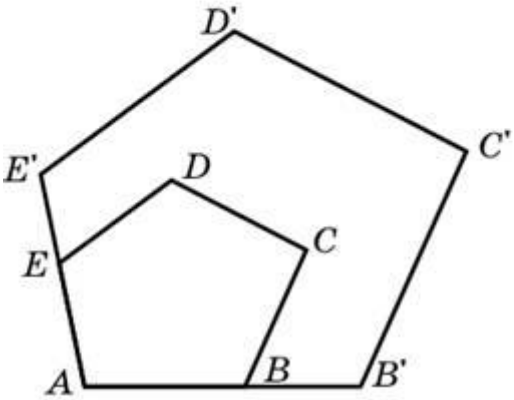


Решение.

По одной из формул площади треугольника, 0,5*10*10*0,5=25.

Ответ: 25.

Задание №27595
Периметры двух подобных многоугольников относятся как 3:5. Площадь меньшего многоугольника равна 18. Найдите площадь большего многоугольника.



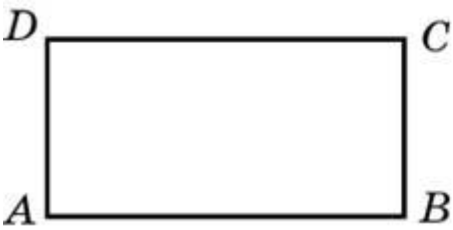
Решение.

Как уже отмечалось, площади подобных фигур относятся как квадраты коэффициента подобия.

$18*(5/3)^2=50$.

Ответ: 50.

Задание №27601
Площадь прямоугольника равна 18. Найдите его большую сторону, если она на 3 больше меньшей стороны.

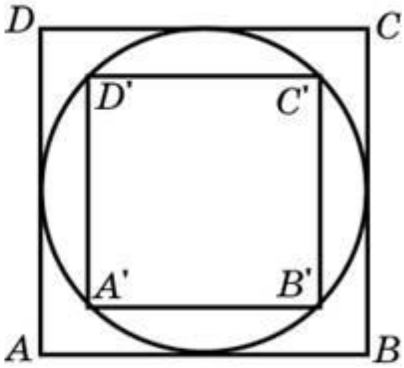


Решение.

Просто задача на формулу площади прямоугольника, $x(x+3)=18$, $x=3$.

Ответ: 3.

Задание №27609
Во сколько раз площадь квадрата, описанного около окружности, больше площади квадрата, вписанного в эту окружность?



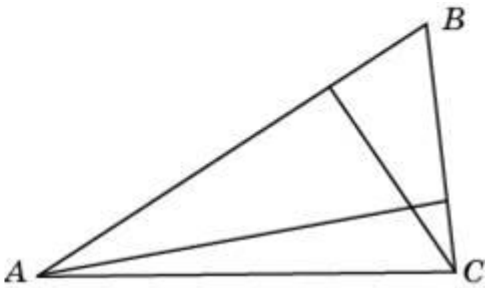
Решение.

Паниковать здесь на не надо, надо рассуждать. Если R – радиус окружности, то сторона большого квадрата будет $2R$, площадь $4R^2$.

Для маленького же квадрата удвоенный радиус является диагональю, тогда сторона квадрата будет в корень из двух раз больше R, тогда площадь маленького квадрата будет $2R^2$.

Ответ: 2.

Задание №27623
У треугольника со сторонами 9 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведенная к первой стороне, равна 4. Чему равна высота, проведенная ко второй стороне?



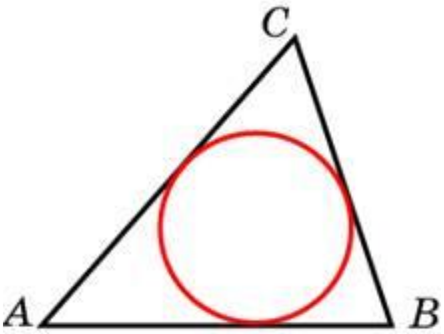
Решение.

Дважды запишем одну и ту же формулу площади через сторону и высоту к ней проведенную, получим ответ.

Ответ: 6.

Задание №27624

Периметр треугольника равен 12, а радиус вписанной окружности равен 1. Найдите площадь этого треугольника.



Решение.

Это классная задача, потому что проверяет одну очень важную формулу площади треугольника.

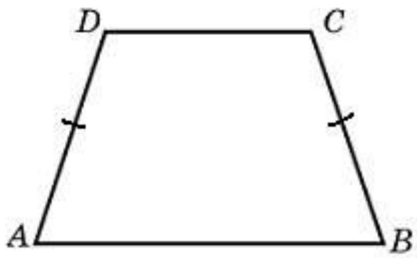
$$S = pr,$$

где p– половина периметра треугольника, r– радиус вписанной в треугольник окружности.

Ответ: 6.

Задание №27631

Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 26, а ее периметр равен 60. Найдите площадь трапеции.



Решение.

Здесь придется попотеть. Если a, b, l – основания и боковая сторона равнобедренной трапеции, то

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{l^2 - \frac{(a-b)^2}{4}}.$$

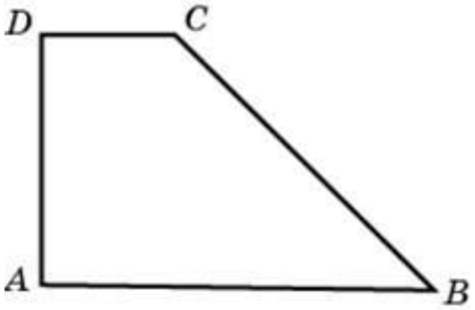
Проведите из вершины высоту на большее основание, получится прямоугольный треугольник, гипотенуза которого есть боковая сторона, один катет – высота трапеции, необходимая для отыскания площади, а другой катет – половина разности оснований трапеции. Вот формула и получилась!

Зная периметр трапеции, находим боковую сторону, 10, а затем и ответ.

Ответ: 160.

Задание №27633

Найдите площадь прямоугольной трапеции, основания которой равны 6 и 2, большая боковая сторона составляет с основанием угол 45∘.



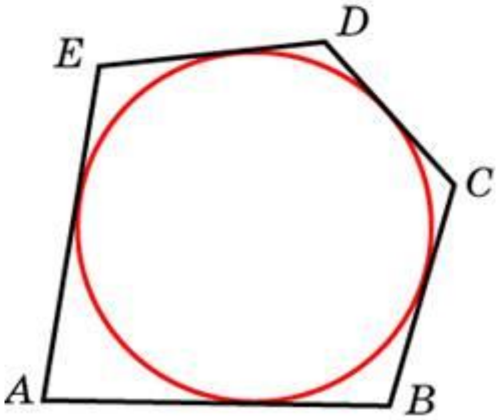
Решение.

Проводим высоту из вершины *C* на *AB*. Трапеция разбилась на прямоугольник и равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом 6–2=4, который еще является и высотой трапеции.

Ответ: 16.

Задание №27640

Около окружности, радиус которой равен 3, описан многоугольник, периметр которого равен 20. Найдите его площадь.

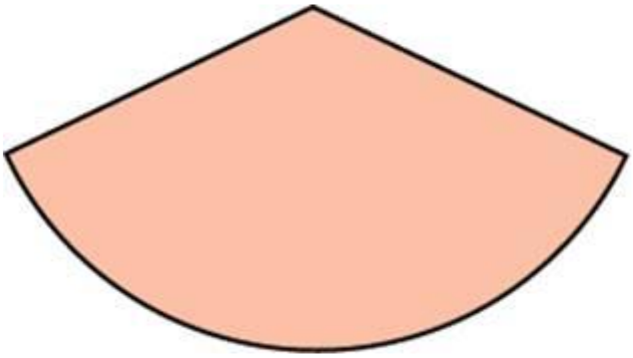


Решение.

Если не вспомнить, что формула площади треугольника через половину периметра и радиус вписанной окружности подходи для любого многоугольника, в который вписана окружность, то можно сойти с ума решая эту задачу. $S=pr$, где p– половина периметра многоугольника.

Ответ: 30.

Задание №27644
Площадь сектора круга радиуса 3 равна 6. Найдите длину его дуги.



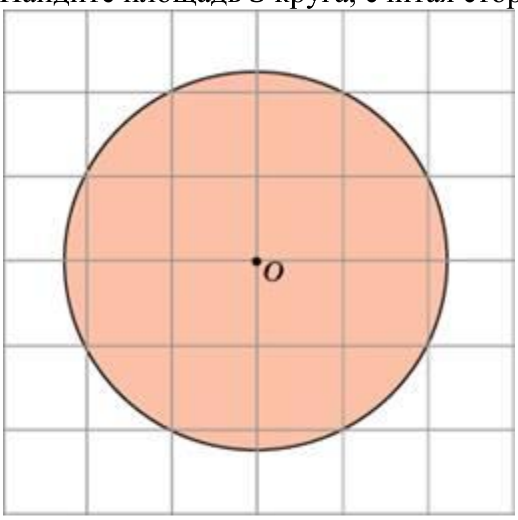
Решение.

Обычно никто не знает формулу расчета площади кругового сектора. Если длина дуги l, то

$$S_{\text{сектор}} = \frac{1}{2}rl.$$

Ответ: 4.

Задание №27646
Найдите площадь S круга, считая стороны квадратных клеток равными 1. В ответе укажите S/π.



Решение.

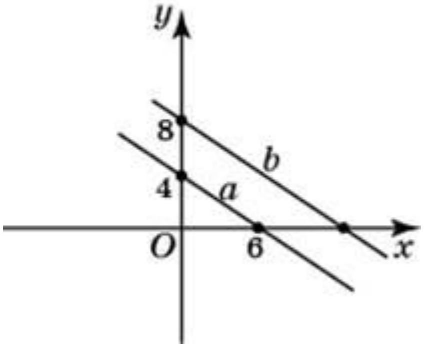
Окружность неслучайно пересекает углы клеточек – верный сигнал к тому, чтобы найти подходящий прямоугольный треугольник, гипотенуза которого будет или радиусом, или диаметром, а катеты легко посчитаются по клеточкам. Тогда можно применить теорему Пифагора и уже найти искомую величину.

Предлагаю двигаться от центра окружности сначала вправо на 1 клетку, затем вверх на 2. Затем (снова от центра окружности) на две клетки вниз, потом и на 1 клетку влево, и на 1 клетку вправо. Получим прямоугольный треугольник, гипотенуза которого есть диаметр, а катеты равны 2 и 4.

Тогда радиус окружности равен корень из пяти, а искомая величина равна 5.

Ответ: 5.

Задание №27669
Прямая a проходит через точки с координатами (0, 4) и (6, 0). Прямая b проходит через точку с координатами (0, 8) и параллельна прямой a. Найдите абсциссу точки пересечения прямой b с осью Ox.



Решение.

Нам уже известно уравнение прямой, знаем, что у параллельных прямых угловые коэффициенты равны и что угловой коэффициент прямой есть тангенс угла её наклона к положительному направлению оси Ox.

Давайте найдем тангенс угла, смежного с тангенсом угла наклона прямой a – для этого есть прекрасный прямоугольный треугольник с вершинами (0;0), (0;4), (6;0): 4/6=2/3. Тогда угловой коэффициент прямой a и параллельной ей прямой b будет (–2/3).

Свободный член уравнения прямой можно найти, просто подставив в уравнение x=0 – это ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

Теперь у нас есть уравнение прямой b: $y=(-2/3)*x + 8$.

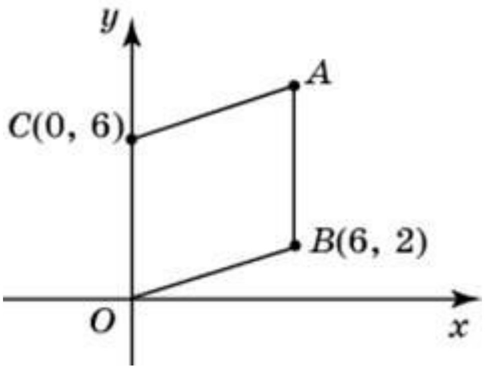
Подставляя в это уравнение y=0, находим абсциссу точки пересечения прямой b с осью Oy, она равна 12.

Но задача помещена в раздел "Геометрия", значит применим и геометрический подход.

В треугольнике с вершинами (0;0), (0;8) и (x;0), где x – искомая абсцисса, проведена средняя линия, являющаяся отрезком с концами (0;4) и (6;0). Тогда незамедлительно из свойств средней линии следует, что x=12.

Ответ: 12.

Задание №27672
Точки O(0, 0), B(6, 2), C(0, 6) и A являются вершинами параллелограмма. Найдите ординату точки A.



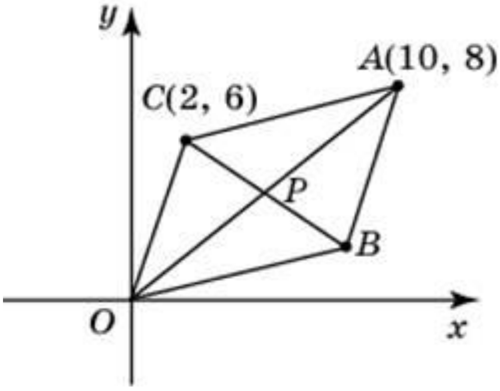
Решение.

По свойству параллелограмма, $CO=AB$, тогда ордината точки A будет больше ординаты точки B ровно на длину отрезка CO.

Ответ: 8.

Задание №27677

Точки O (0, 0), A (10, 8), C (2, 6) и B являются вершинами параллелограмма. Найдите абсциссу точки B.



Решение.

Можно что-то придумать про векторы, но мне не хочется. Давайте просто посмотрим на рисунок и напишем то, что видим – благо, параллелограмм со своими свойствами ошибиться не позволит.

Точка C настолько выше точки O, насколько точка A выше точки B.

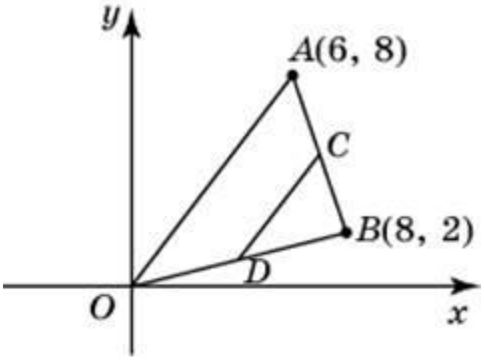
Точка A настолько дальше точки C, насколько точка B дальше точки O.

Теперь координаты точки B может написать каждый – (8; 2).

Ответ: 8.

Задание №27685

Точки O(0, 0), A(6, 8), B(8, 2) являются вершинами треугольника. Найдите длину его средней линии CD, параллельной OA.



Решение.

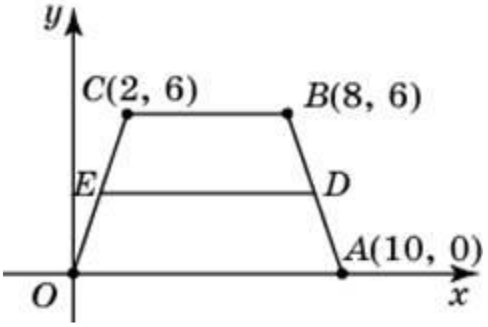
По свойству средней линии треугольника, CD=0,5*AO. Длина отрезка AO находится по формуле

$$\rho\big(A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)\big)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Она равна 10, тогда искомый отрезок равен 5.

Ответ: 5.

Задание №27686
Точки $O(0,\ 0)$, $A(10,\ 0)$, $B(8,\ 6)$, $C(2,\ 6)$ являются вершинами трапеции. Найдите длину ее средней линии DE.



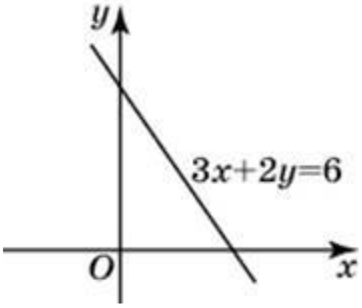
Решение.

Длина средней линии трапеции равна половине суммы длин оснований трапеции. Формулу эту легко получить просто проведя любую из диагоналей и посмотрев на два треугольника – в каждом из них отрезки, на которые диагональ поделила среднюю линию трапеции, будут средними линиями, равными (по свойству) половинам оснований.

Складывая эти два отрезка, получим результат.

Ответ: 8.

Задание №27687
Найдите абсциссу точки пересечения прямой, заданной уравнением $3x+2y=6$, с осью Ox.

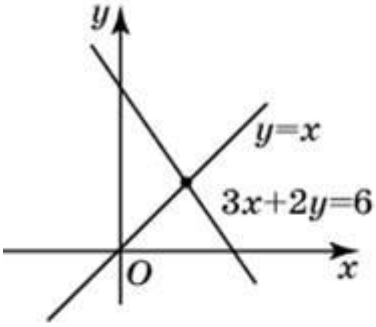


Решение.

Просто подставляем в уравнение $y=0$ и получаем $x=2$.

Ответ: 2.

Задание №27689
Найдите абсциссу точки пересечения прямых, заданных уравнениями $3x+2y=6$ и $y=x$.

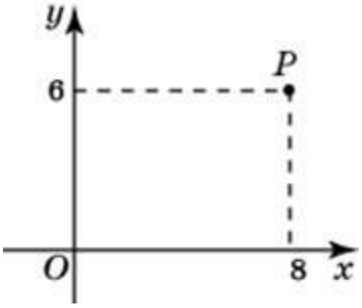


Решение.

Надо просто решить систему этих уравнений, только и всего.

Ответ: 1,2.

Задание №27694
Какого радиуса должна быть окружность с центром в точке $P(8, 6)$, чтобы она касалась оси ординат?

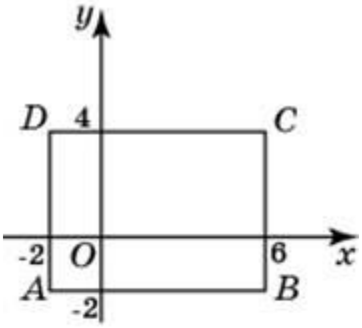


Решение.

Просто разность абсцисс точек (0;6) и $P(8; 6)$.

Ответ: 8.

Задание №27695
Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, вершины которого имеют координаты соответственно (-2, -2), (6, -2), (6, 4), (-2, 4).



Решение.

Из свойств прямоугольника следует, что радиус описанной окружность есть половина диагонали прямоугольника. Достаточно найти половину любого из отрезков AC или BD.

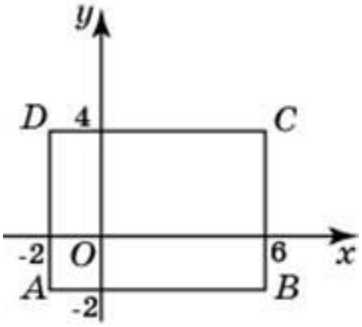
Используя формулу

$$\rho\big(A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)\big) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

получаем ответ 5.

Ответ: 5.

Задание №27696
Найдите абсциссу центра окружности, описанной около прямоугольника *ABCD*, вершины которого имеют координаты соответственно (-2, -2), (6, -2), (6, 4), (-2, 4).



Решение.

По свойству прямоугольника, центр описанной окружности лежит в точке пересечения диагоналей прямоугольника, а диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам.

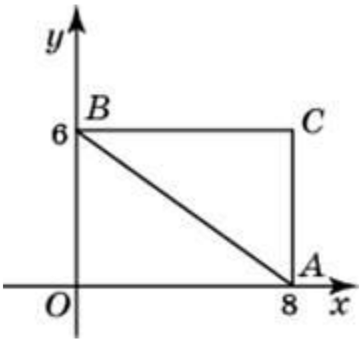
Достаточно найти координаты середины любого из отрезков *AC* или *BD*. Есть соответствующая формула.

Если $M(x;y)$ − середина отрезка $AB, A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$, то $x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Получаем координаты точки *O* – центра описанной окружности, (2;1).

Ответ: 2.

Задание №27698
Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, вершины которого имеют координаты (8, 0), (0, 6), (8, 6).



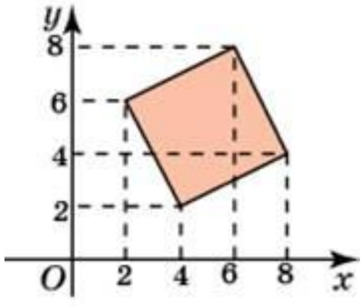
Решение.

Мы помним, что центр описанной около прямоугольного треугольника окружности лежит на середине гипотенузы. Находим длину отрезка *AB* по формуле, которую уже давно выучили, делим пополам и пишем в ответ.

Ответ: 5.

Задание №27701

Найдите площадь четырехугольника, вершины которого имеют координаты (4, 2), (8, 4), (6, 8), (2, 6).



Решение.

То, что на рисунке изображен квадрат, сомнений ни у кого не должно вызывать. По формуле расстояния между двумя точками, которую каждый уже выучил как собственное имя, считаем сторону квадрата, она равна корень из пяти. Тогда площадь будет 5.

Ответ: 5.

Задание №27704

Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (2;2), (8;10), (8;8).

Решение.

Абсолютно ничто не мешает нам просто нарисовать этот треугольник на листе, увидеть, что одна из сторон вертикальна и легко считается вместе с высотой, которая к ней проводится. Сразу ответ 6.

С другой стороны, мы можем ничего не рисовать. Применив трижды формулу для нахождения расстояния между двумя точками – найдя длины сторон треугольника – и применив формулу Герона

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \qquad p=\frac{a+b+c}{2},$$

где p называют словом "полупериметр", мы можем найти площадь.

Мне кажется, что этот путь слишком длинный и можно на нем пару раз подорваться, если вдруг (не вдруг, а наверняка) получаемые длины сторон треугольника будут содержать *плохие* числа – не извлекающиеся нацело квадратные корни.

Но с другой стороны, если треугольник после рисования оказался *плохим*, то каждый человек должен пройти и таким путем, так что если будет время, аккуратно посчитайте всё. У вас всегда есть гарантия успеха, потому что ответом даже на самую страшную формулу, после всех преобразований будет *красивое* число, подходящее для записи в бланк ответов.

Ответ: 6.

Задание №27706
Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (2, 2), (10, 4), (10, 10), (2, 6).

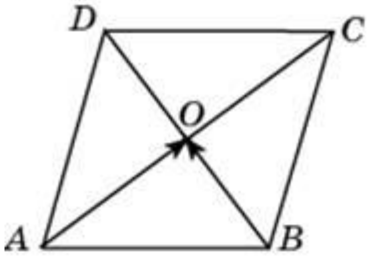
Решение.

Даже если ничего не рисовать, трапецию всегда можно представить в виде двух треугольников и найти их площади по методу, описанному в предыдущей задаче.

Но я нарисовал трапецию по данным координатам, весьма удачно её основания оказались вертикальными отрезками, длины которых и расстояние между которыми легко подсчитываются, хоть по клеточкам, хоть по координатам. Формулу площади трапеции как половину произведения суммы оснований и высоты, вы все, разумеется, уже давным-давно знаете

Ответ: 40.

Задание №27717
Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}$.



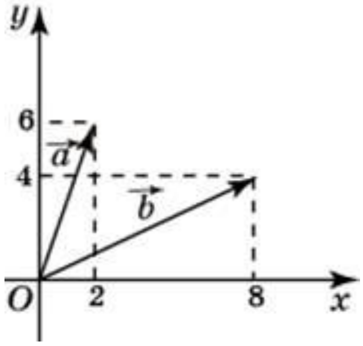
Решение.

Давайте поймем, что $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$, тогда $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}$. Теперь вспомним, что диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам, да еще при этом перпендикулярны. Остается посчитать гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8.

Ответ: 10.

Задание №27735

Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ответ дайте в градусах.



Решение.

Можно действовать по-разному. Можно попробовать найти углы между векторами и ближайшими к ним осями, подходящие для этого прямоугольные треугольники прекрасно видны. Затем результаты вычесть из угла 90 градусов.

Можно найти площадь треугольника, сторонами которого являются векторы и отрезок, соединяющий их концы, потом по формуле найти синус угла и сам искомый угол. Для этого можно найти длины каждого отрезка, затем применить формулу Герона. Или же дорисовать большой прямоугольник вокруг этого треугольника и, путем вычитаний из площади такого прямоугольника площадей маленьких прямоугольных треугольников, найти площадь *нашего* треугольника.

Однако есть формула, позволяющая вычислить косинус угла между векторами.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_a\cdot x_b + y_a\cdot y_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2+y_b^2}},$$

где α – угол между векторами, $\{x_a; y_a\}$, $\{x_b; y_b\}$ – координаты векторов.

Числители дробей, записанных в формуле, называют *скалярным произведением* векторов.

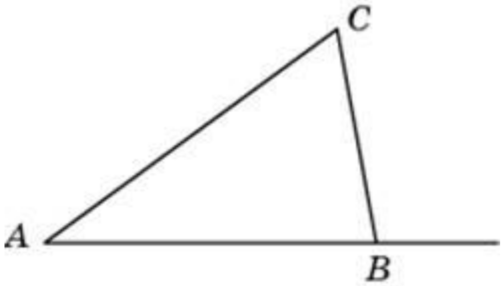
А сама формула читается так: косинус угла между векторами равен отношению скалярного произведения этих векторов на произведение их длин.

У нас

$$\vec{a}\{2;6\},\qquad \vec{b}\{8;4\},\qquad \cos\alpha = \frac{2\cdot 8+6\cdot 4}{\sqrt{4+36}\cdot\sqrt{64+16}} = \frac{40}{\sqrt{40}\cdot\sqrt{80}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\qquad \alpha = 45°.$$

Ответ: 45.

Задание №27743
В треугольнике ABC угол A равен 40°, внешний угол при вершине B равен 102°. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.



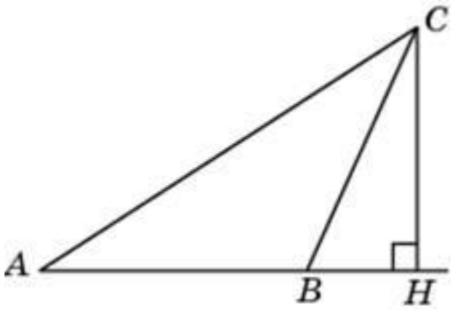
Решение.

Угол B найдем как разность 180° и смежного угла, 180°–102°=78°.

Угол C найдем как разность 180° и всех остальных углов треугольника, 180°–40°–78°=62°.

Ответ: 62.

Задание №27757
В треугольнике ABC угол A равен 30°, CH — высота, угол BCH равен 22°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.

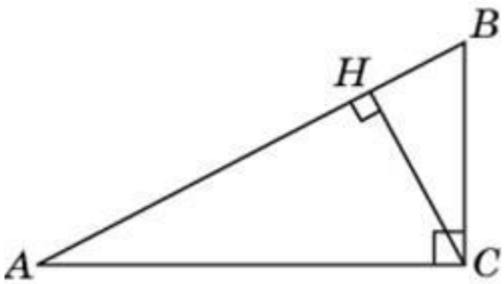


Решение.

Угол C равен 90°–30°=60°. В сумме искомый угол с углом BCH образуют угол C. Тогда искомый угол ACB равен 60°–22°=38°.

Ответ: 38.

Задание №27789
В треугольнике ABC угол C равен 90°, угол A равен 30°, $AB=2\sqrt{3}$. Найдите высоту CH.



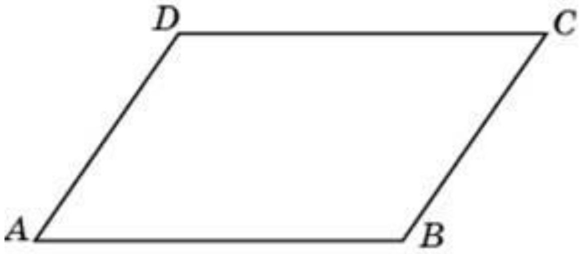
Решение.

Великое множество вычислительных задач по геометрии было встречено в разделе "Алгебра" и решено в соответствующей методичке.

$$CH = AB \cdot \cos BAC \cdot \sin BAC = AB \cdot \cos ABC \cdot \sin ABC = 1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

Задание №27807
Один угол параллелограмма больше другого на 70°. Найдите больший угол. Ответ дайте в градусах.



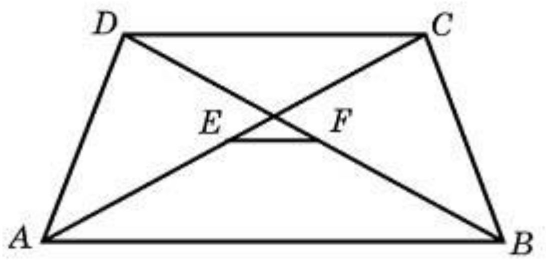
Решение.

Составляем уравнение, вспоминая о том, что неравные углы параллелограмма в сумме дают 180°.

x+70°+x=180°, x=55°.

Ответ: 55.

Задание №27843
Основания трапеции равны 3 и 2. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.



Решение.

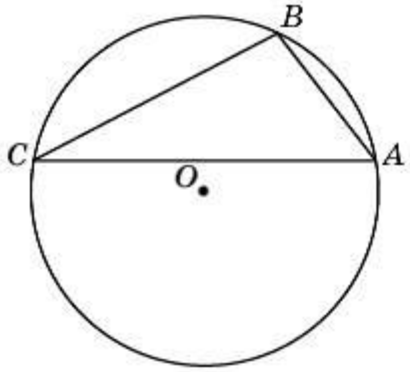
Понятно, что этот отрезок – участок средней линии трапеции, её формулу мы знаем (половина суммы оснований). Если нарисовать среднюю линию *MN* трапеции, то можно посмотреть на два треугольника – *ADC* и *BCD*. В них *ME* и *FN* – средние линии, равные половине основания *DC*.

Тогда $EF=MN-ME-FN=(AB+DC)/2 - DC=(AB-DC)/2=0{,}5$.

Иными словами, линия, соединяющая середины диагоналей трапеции, равна половине разности оснований трапеции.

Ответ: 0,5.

Задание №27868
Точки A, B, C, расположенные на окружности, делят ее на три дуги, градусные величины которых относятся как 1:3:5. Найдите больший угол треугольника ABC. Ответ дайте в градусах.



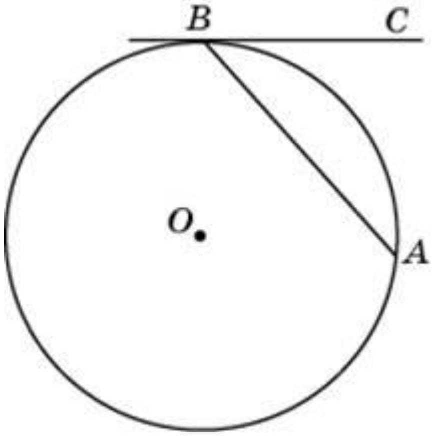
Решение.

Если ввести коэффициент пропорциональности k, то дуги в сумме образуют окружность $9k$.

Мы знаем, что градусная мера дуги, длиною в окружность, равна 360°. Тогда k=40° Понятно также, что больший угол треугольника лежит против большей дуги. Тогда незамедлительно, больший угол треугольника равен половине градусной меры дуги окружности, на которую он опирается, и равен $5k/2$=100°.

Ответ: 100.

Задание №27877
Хорда AB стягивает дугу окружности в 92°. Найдите угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведенной через точку B. Ответ дайте в градусах.



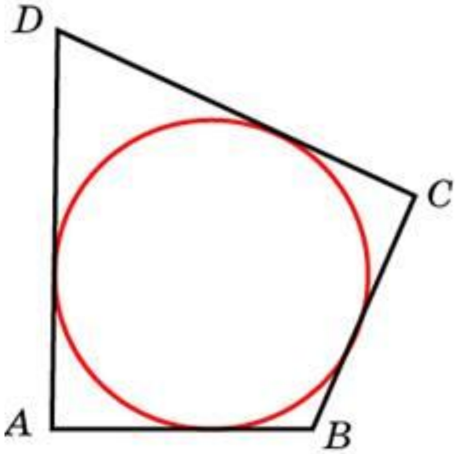
Решение.

Угол между касательной и хордой равен половине градусной меры дуги, которую этот угол стягивает.

Ответ: 46.

Задание №27941

В четырехугольник *ABCD* вписана окружность, *AB*=10, *BC*=11 и *CD*=15. Найдите четвертую сторону четырехугольника.

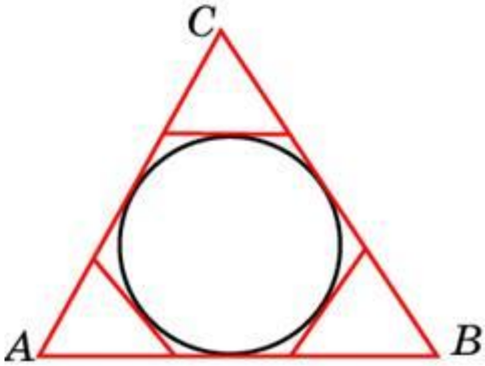


Решение.

Суммы длин противоположных сторон четырехугольника равны, если в него можно вписать окружность. Этот факт можно получить на основе того, что отрезки двух касательных, исходящих к окружности из одной точки, равны.

Ответ: 14.

Задание №27943
К окружности, вписанной в треугольник *ABC*, проведены три касательные. Периметры отсеченных треугольников равны 6, 8, 10. Найдите периметр данного треугольника.



Решение.

Только лишь на свойстве касательных, проведенных из одной точке к окружности, можно понять, что периметр большого треугольника будет равен сумме периметров маленьких.

Ответ: 24.

Задание №284348
В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* точка *O* — центр основания, *S* вершина, *SO*=4, *AC*=6. Найдите боковое ребро *SC*.

Решение

Точка *O* является центром основания правильной четырехугольной пирамиды, а значит образуется прямоугольный треугольник, гипотенузой в котором является искомое боковое ребро, одним катетом – высота пирамиды, а другим – половина диагонали основания.

Ответ: 5.

Задание №316552
В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: AB=24, AD=10, AA_1=22. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины A, A_1 и C.

Решение.

Это сечение представляет собой прямоугольник AA_1C_1C. Нужно только отыскать сторону AC, по теореме Пифагора, находим AC=26.

Ответ: 572.

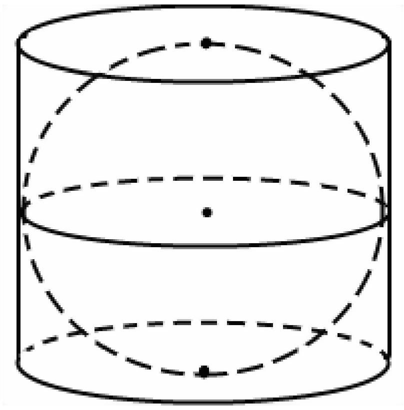
Задание №316554
В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и B_1D_1. Ответ дайте в градусах.

Решение.

Треугольник AD_1B_1 равносторонний, каждая его сторона является диагональю соответствующей грани куба.

Ответ: 60.

Задание №316557
Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 111. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.



Решение.

Площадь поверхности шара

$$S_{\text{шар}} = 4 \cdot \pi \cdot R^2.$$

Площадь полной поверхности цилиндра

$$S_{\text{ц}} = S_{\text{бок}} + 2 \cdot S_{\text{осн}} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot R^2 = 2\pi R(h + R).$$

Поскольку цилиндр вписан в шар, то высота цилиндра равняется двум радиусам.

$$S = 2\pi R(2R + R) = 6\pi R^2 = \frac{3}{2} S_{\text{шар}} = 166{,}5.$$

Ответ: 166,5.

Задание №316558
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 3, найдите угол между прямыми AA_1 и BC_1. Ответ дайте в градусах.

Решение.

Правильная призма это прямая призма, в основаниях которой правильные многоугольники.

Поскольку ребро AA_1 параллельно ребру CC_1, то искомый угол это просто угол CC_1B. Поскольку все ребра равны, то грани призмы есть квадраты, а значит искомый угол равен 45 градусов.

Ответ: 45.

Задание №317338
Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 189. Точка E — середина стороны AD. Найдите площадь трапеции $AECB$.

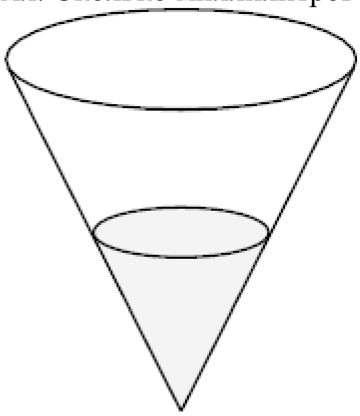
Решение.

Если a – сторона BC параллелограмма, то его площадь и искомая площадь связаны

$$S_{\text{п}} = ah, \qquad S_2 = \frac{a+b}{2}h = \frac{a+\frac{a}{2}}{2}h = \frac{3}{4}ah = 141{,}75.$$

Ответ: 141,75.

Задание №318145
В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{2}$ высоты. Объём жидкости равен 70 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Решение.

Объемы подобных тел относятся как кубы коэффициента подобия. Если объем жидкости равен 70 мл, то весь сосуд вместит в 8 раз больше, 560, значит долить осталось 490 мл.

Ответ: 490.

Задание №318146
В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* с основанием *ABCD* боковое ребро *SA* равно 5, сторона основания равна $3\sqrt{2}$. Найдите объём пирамиды.

Решение.

Нужно найти высоту. Половина диагонали основания по, теореме Пифагора, из равнобедренного прямоугольного треугольника в основании получается равной 3, а уже из треугольника, плоскость которого перпендикулярна плоскости основания, с гипотенузой в виде ребра, одним катетом которого является половина диагонали основания, а другим – высота, получаем, что высота равна 4.

Площадь основания равна квадрату стороны, 6. Тогда искомый объем 1/3*6*4=8.

Ответ: 8.

Задание №47995
В треугольнике *ABC* угол *A* равен 60°, угол *B* равен 53°. *AD*, *BE* и *CF* — биссектрисы, пересекающиеся в точке *O*. Найдите угол *AOF*. Ответ дайте в градусах.

Решение.

Можно найти

$$\angle AFC = 180° - \angle A - \angle ACF = 180° - 60° - \frac{1}{2}\angle C = 120° - \frac{1}{2}(180° - \angle A - \angle B) = 86{,}5°.$$

Теперь, из треугольника *AFO*, можно найти искомый угол.

$$\angle AOF = 180° - \angle FAO - \angle AFC = 93{,}5° - \frac{1}{2}\angle A = 63{,}5°.$$

Ответ: 63,5.

Задание №71889
Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 15. Найдите объем параллелепипеда.

Решение.

Для начала, окружность не впишешь в прямоугольник, значит в основании нашего параллелепипеда лежат квадраты, причем сторона любого из них равна двум радиусам. Тогда сразу объем параллелепипеда 15*30*30=13500.

Ответ: 13500.

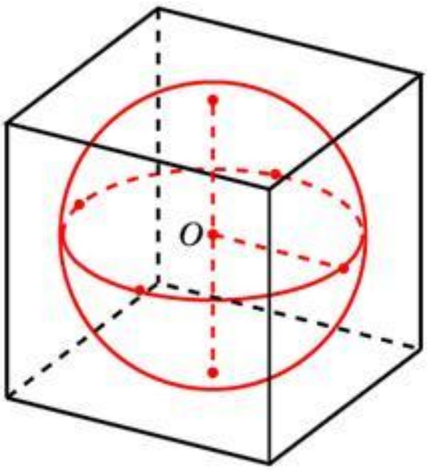
Задание №71929
Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 12. Объем параллелепипеда равен 115,2. Найдите высоту цилиндра.

Решение.

x*(2*12)*(2*12)=115,2, x=0,2.

Ответ: 0,2.

Задание №71969
Куб описан около сферы радиуса 12,5. Найдите объём куба.



Решение.

Ребро куба в два раза больше радиуса шара, в него в писанного, 2*12,5=25. Формулу объема куба мы знаем.

Ответ: 15625.

Задание №72539
Площадь поверхности куба равна 200. Найдите его диагональ.

Решение.

Диагональ куба в корень из трех раз больше его ребра, а площадь поверхности равна $6*a^2$.

Ответ: 10.

Задание №72601
Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 5, а высота — 5.

Решение.

Площадь боковой поверхности правильной призмы, это произведение периметра основания на высоту.

Ответ: 150.

Задание №72673
Радиус основания цилиндра равен 7, высота равна 10. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π.

Решение.

Мы знаем формулу площади боковой поверхности цилиндра, её можно получить в домашних условиях. Сверните прямоугольный лист трубочкой так, чтобы границы лишь соприкасались – получили боковую поверхность цилиндра. Пусть теперь радиус основания равен R, высота цилиндра h. Мы знаем, как посчитать длину окружности, $2\pi R$. Теперь разворачивайте ваш прямоугольный лист – получите ту же поверхность, которая является прямоугольником со сторонам $2\pi R$ и h, её площадь равна произведению $2\pi Rh$.

Ответ: 140.

Задание №72719
Площадь большого круга шара равна 7. Найдите площадь поверхности шара.

Решение.

Площадь поверхности шара в 4 раза больше площади большого круга, есть соответствующая формула.

Ответ: 28.

Задание №72871
Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 9 и 40, и боковым ребром, равным 55.

Решение.

Площадь ромба можно найти еще и как произведение его диагоналей. Ну, а площадь поверхности призмы мы считать умеем.

Ответ: 19800.

Задание №73123
Через среднюю линию основания треугольной призмы, площадь боковой поверхности которой равна 54, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы.

Решение.

Площади подобных фигур относятся как квадраты коэффициента подобия. Каждую грань обеих призм можно рассматривать как фигуру – они будут образовывать пары подобных треугольников с коэффициентом 0,5. Т.е. площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы будет в 4 раза меньше площади большой призмы.

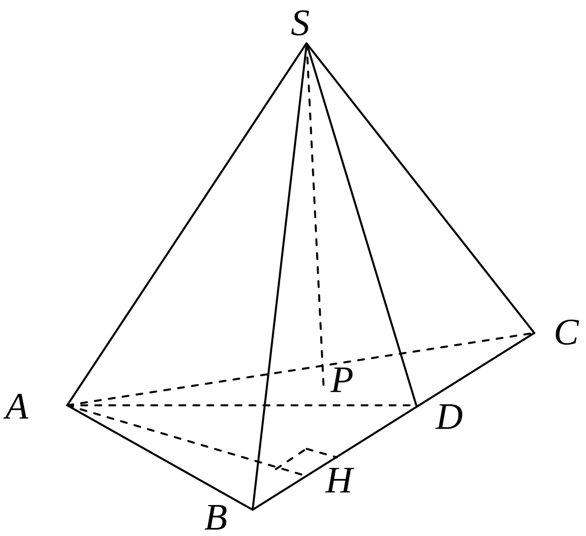
Ответ: 13,5.

Задание №75173

Объем треугольной пирамиды равен 30. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении 7:8, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объемов пирамид, на которые плоскость разбивает исходную пирамиду.

Решение.

Очень интересная ситуация, рисунка к этой задаче нет, а без него её не решить.



Придется рисовать самому.

Итак, на рисунке плоскость *ASD* разбивает пирамиду на две, причем *CD* : *BH*=7:8.

Специально для наглядности проведены высота большой пирамиды и высота треугольника *ABC*.

Это сделано для удобства рассмотрения пирамид *SABD* и *SACD*.

Высота у них одна и та же, *SP*. У оснований-треугольников тоже одна высота, *AH*, а вот длины сторон, к которым она проведена, разные. Зато в условии задачи дано отношение этих сторон. Значит, мы можем узнать отношение площадей треугольников *ABD* и *ACD*, оно равно отношению сторон, к которым проведены равные высоты, т.е. равно 8:7.

Постепенно становится понятно, что большим объёмом обладает пирамида *SABD*. Давайте введем площадь *S* треугольника *ABD* и *SP*=*h*, тогда площадь треугольника *ACD* будет равна $\frac{7}{8}S$.

Объем пирамиды *SABD* будет равен $\frac{1}{3}Sh$, объем пирамиды *SACD* будет равен $\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8}Sh$.

Тогда объем исходной пирамиды будет равен $\frac{1}{3}Sh \cdot \frac{15}{8} = 30$, откуда искомый объем пирамиды *SABD* равен 30*8/15=16.

Каждому должно быть понятно, что пирамида абсолютно произвольная, никаких хороших свойств, кроме обусловленных задачей, нам здесь не потребовалось. Только простые рассуждения и проведения высот, не требующие каких-либо доказательств.

Многим читателям покажется, что рисунок мой неправильный, что плоскость проходит не через сторону основания, а через ребро пирамиды, и что вершина никакая не вершина, а точка основания пирамиды. Это всё неверно, поскольку что именно назвать вершиной пирамиды, а что её основанием – дело сугубо личное. Рисунок я рисовал именно так, потому что счел максимально наглядным и понятным именно такое расположение секущей плоскости.

Ответ: 16.

Минимум:

1) надо знать всё про прямоугольный параллелепипед, про его частный случай – куб;

2) надо знать всё про прямоугольный треугольник, теорему Пифагора надо знать;

3) надо знать хотя бы одну формулу площади треугольника;

4) надо уметь вычислять все элементы треугольника по нескольким данным – теоремы косинусов и синусов.

Необходимый уровень:

1) знать всё про треугольник, окружность, параллелограмм (и все его частные случи – ромб, прямоугольник, квадрат), трапецию – множество свойств и формул, описывающих отношение между элементами;

2) многочисленные формулы площадей плоских фигур, уметь выводить формулы искомых элементов – как мы сами вывели формулу расстояния между серединами диагоналей трапеции;

3) знать всё про многоугольник, вписанный в окружность или описанный около неё;

4) знать всё про секущие, касательные, хорды, вписанные и центральные углы, дуги, сектора и сегменты;

5) знать всё про призму (частный случай – прямоугольный параллелепипед, куб), пирамиду, конус, сферу – многочисленные формулы объемов, площадей полных поверхностей, площадей боковых поверхностей, знать случаи их взаимного расположения (что-то во что-то вписано), а также уметь уверенно строить сечения чего-то плоскостью;

6) обязательно надо знать все приемы координатного и векторного методов – формулы расстояния между точками, координат середины отрезка, длины вектора, косинуса угла между векторами, уравнения прямой по двум точкам и так далее;

Джендубаев Эдуард, 23 июля 2014 года.

****

Я надеюсь, что вы посетили сайт http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/5 и увидели внизу страницы мелким шрифтом "Использование материалов открытого банка в коммерческих целях запрещено". Поэтому, я не имею никакого права ни у кого просить вознаграждения. В то же время, любой труд должен быть оплачен ☺. Мой телефон +7 963 170 43 67.

****